ラングレーの問題 100 周年

1922 年 10 月，数学者エドワード・マン・ラングレー「**ラングレーの問題**」発表 → 2022 年 10 月

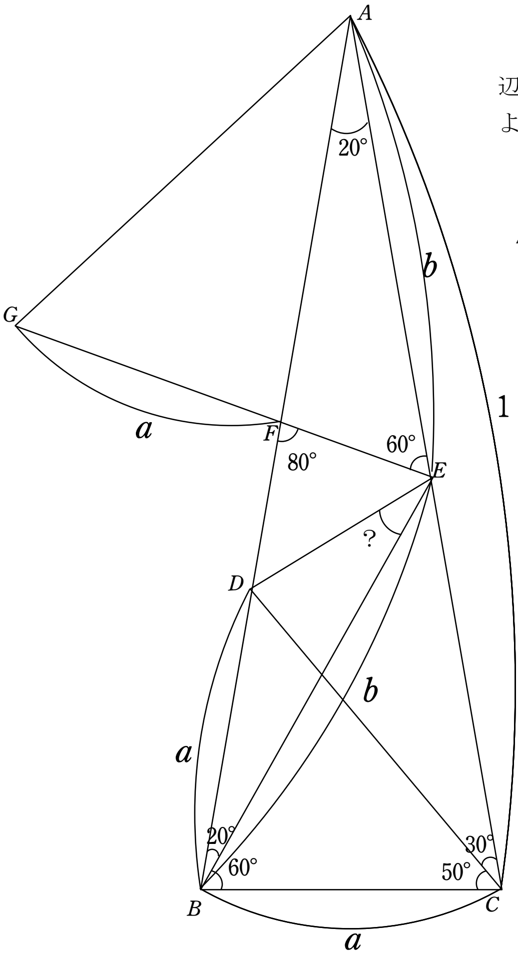
100 周年

2022 年 9 月 16・17 日，京都先端科学高等学校文化祭にて，「ラングレーの問題 100 周年～数学別解の世界～」の展示が行われました。展示会場では，「ラングレーの問題」の紹介，「ラングレーの問題」の 9 通りの代表的な解答の掲示があり，2 日間で 150 名を超える入場者がありました。9 通りの解答を見ていただき，どの解答が最も「なるほど」と感じられたかのアンケートも実施しました。

アンケート結果

順位	解の番号	票数
1	5	18
2	1	14
3	9	13
4	3	11
5	6	10
6	4	9
7	7	7
8	8	5
9	2	3
計		90

図 1



解 9

$AB=AC=1$， $BC=BD=a$， $EB=EA=b$ とおいても一般性を失わない。

辺 AB 上に， $BE=BF=b$ となるように点 F をとる。

次に，直線 EF 上に， $FG=a$ となるように点 G をとる。

$\triangle BEF$ で $\angle BEF=\angle BFE=80^\circ$

よって， $\angle AFG=80^\circ$

$\triangle AFG$ と $\triangle ECB$ で，

$\angle AFG=\angle ECB=80^\circ$

$AF=EC=1-b$，

$FG=CB=a$

ゆえに， $\triangle AFG\equiv\triangle ECB$

よって， $AG=EB=b$

つまり，$\triangle AGE$ は

$AG=AE=b$ の二等辺三角形，

加えて，

$\angle AEG=180^\circ-40^\circ-80^\circ=60^\circ$

となり， $\triangle AGE$ は正三角形。

すると，$GE=b$， $FE=b-a$，

また， $FD=BF-a=b-a$

よって，$\triangle FDE$ は

$FD=FE$ の二等辺三角形，

したがって，

$\angle FED=(180^\circ-80^\circ)\times\frac{1}{2}=50^\circ$，

$\angle BED=80^\circ-50^\circ=30^\circ$ 答

解 5 は「正 18 角形」の解，

解 1 はもっとも有名な解で，今までに発表しています。

解 9 は，ラングレー自身が 1923 年に最初に明らかにした解の一つで，ここに紹介します。（図 1）

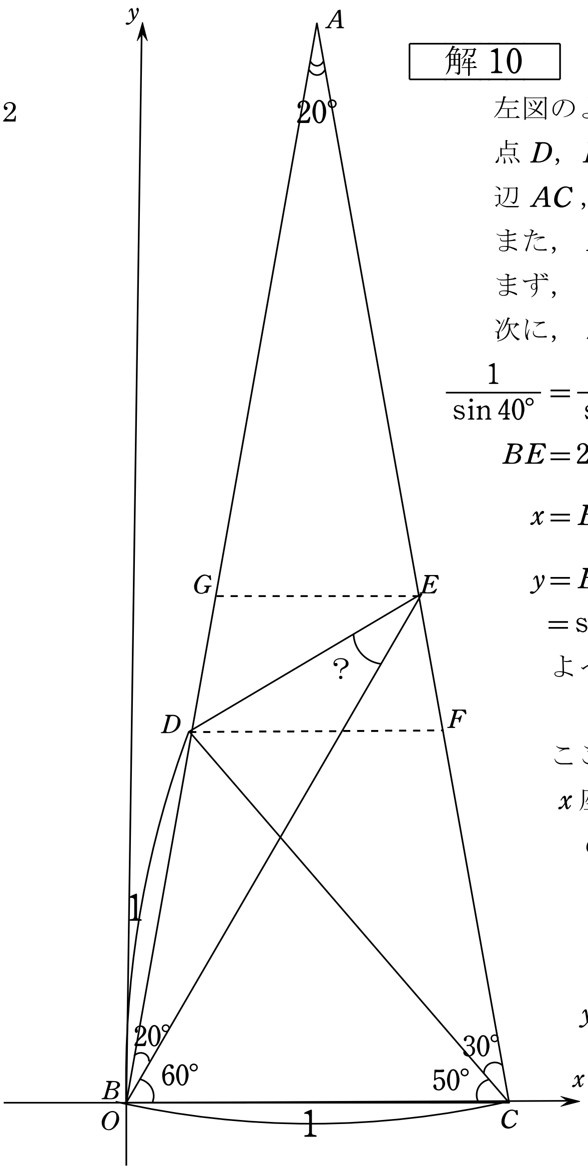
「1 つの問題を複数の解法で解くのは難しいことだけれど，解法はどれも鮮やかで素敵でした」

「脳細胞が活性化されたような気がしました」「背後にある性質について探求してみたい」（感想より）

山脇の超数学講座 No. 42

いよいよ 100 周年を迎え，101 年目に突入します。ここで新たな解 $\boxed{\text{解 10}}$ を発表します。この解は，座標を使ったもので，「ラングレーの問題」に新たな視点を与えるものです。ここでも三角関数は必須の道具です。また「2 倍角公式」「和積変換公式」も用います。今後も「ラングレーの問題」への探究は続きます。「別解」は，数学探究の本質です。

図 2



$\boxed{\text{解 10}}$　　**ラングレーの問題**

左図のように座標軸をとる。

点 D，E から辺 BC に平行線を引き，

辺 AC，AB との交点をそれぞれ F， G とする。

また， $BC=BD=1$ としても一般性を失わない。

まず， $\underline{D(\cos 80°,\ \sin 80°)}$

次に， $\triangle BCE$ で，正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin 40°}=\frac{BE}{\sin 80°} \Longrightarrow BE=\frac{2\sin 40°\cos 40°}{\sin 40°} \Longrightarrow$$

$BE=2\cos 40°$，　　$E(x,\ y)$ とすると

$$x=BE\cos 60° =2\cos 40° \times\frac{1}{2}=\cos 40°\ ,$$

$$y=BE\sin 60° = 2\sin 60°\cos 40°$$

$$=\sin 100° +\sin 20°=\sin 80° +\sin 20°$$

よって， $\underline{E(\cos 40°,\ \sin 80° +\sin 20°)}$

ここで，直線 DE の傾きを求める。

x 座標の差：

$$\cos 40° -\cos 80°$$

$$=-2\sin\frac{40°+80°}{2}\sin\frac{40°-80°}{2}$$

$$= 2\sin 60°\sin 20°$$

y 座標の差：

$$\sin 80° +\sin 20° -\sin 80°=\sin 20°$$

よって，直線 DE の傾きを m とすると，

$$m=\frac{\sin 20°}{2\sin 60°\ \sin 20°} =\frac{1}{2\sin 60°}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°\ ,\quad \therefore\ \angle FDE=30°\ ,$$

$GE /\!/ DF /\!/ BC$ より，$\angle GED=\angle FDE=30°$， また， $\angle GEB=\angle CBE=60°$,

したがって， $\underline{\angle BED=60°-30°=30°\quad 答}$